SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matea Baraba

MATEMATIČKI SADRŽAJI U STAROEGIPATSKOJ ARHITEKTURI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Mirko Polonijo

Zagreb, rujan, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru na iznimnom razumijevanju, strpljenju i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem svojoj obitelji i prijateljima na potpori i ohrabrenju. Posebna zahvala Dori Badžoka, Petri Ćerluka, Vandi Đolo, Marini Klanjčić i Frani Pijuku na savjetima i kritikama.

Sadržaj

Uvod

Ljudi se oduvijek pitaju što je bilo prije njih, kakvi su ljudi živjeli na mjestu na kojem oni sada žive, čime su se bavili, kako su stvorili sve što su ostavili za sobom. Staroegipatska arhitektura, kao i cjelokupna kultura, nije izuzetak. Monumentalne građevine i živopisne ilustracije ne ostavljaju mjesta ravnodušnosti. Dok se jedni samo dive ostavštini starog Egipta, drugi je nakon početnog oduševljenja žele istražiti, čak i rekonstruirati. Staroegipatska je civilizacija bila jedna od najrazvijenijih i najdugovječnijih te je za sobom ostavila trag koji su ostale pratile. Sva njezina znanja i postignuća nadograđivala su se i rezultirala današnjim znanjima i postignućima. Zna se tko je i kada vladao starim Egiptom, tko je, kada i gdje sagradio hram ili grobnicu. Matematičari znaju da piramide nisu nastale samo od kamena - matematička znanja su morala odigrati veliku ulogu u procesima planiranja i gradnje. Ne samo piramida, već u arhitekturi općenito. Tijekom godina istraživanja i proučavanja odgovoreno je na pitanja ”tko?”, ”kada?” i ”gdje?”. Preostaje još odgovoriti na pitanje ”kako?”.

Poglavlje 1

Stari Egipat

Starim ili drevnim Egiptom nazivamo antičku civilizaciju koja je područje današnjeg Egipta naseljavala od otprilike 3100. godine prije Krista, kada su ujedinjeni Donje i Gornje kraljevstvo do osvajanja Aleksandra Velikog 332. godine prije Krista. Geografski položaj između Arapske i Libijske pustinje i Sredozemnog mora u koje se ulijeva rijeka Nil uvelike je pridonio razvoju u jednu od najbogatijih svjetskih kultura. Stari su Egipćani dijelili zemlju na crvenu i crnu. Crnom zemljom su zvali plodno tlo uz rijeku Nil jer bi nakon poplave za sobom ostavljala crni mulj koji je služio kao gnojivo. Crvena zemlja je bio naziv za pustinje na graničnom području. One su štitile od neprijateljskih invazija, a ujedno su krile nalazišta dragocjenih metala i poludragog kamenja. Naselja su građena na granici crne i crvene zemlje. Na taj način su nastambe bile zaštićene od poplava Nila i obradivo se tlo moglo maksimalno iskoristiti.

Staroegipatsko je društvo bilo hijerarhijsko; na vrhu je bio vladar sa svojom obitelji, a slijedili su ga redom visoki službenici, vrhovni svećenici, visoki časnici vojske, pisari, svećenici, vojnici, obrtnici i radnici te seljaci i robovi. Vladar je predstavljao jedinstvo i smatrali su ga potomkom bogova i njihovim poslanikom na Zemlji. Oko 900. godine prije Krista za njega se ustalio naziv faraon, grčka riječ za staroegipatsku *per-aa* koja je označavala kraljevsku rezidenciju. Faraoni su Egiptom vladali gotovo tri tisućljeća, a u njihovoj vladavini razlikuju se tri važna razdoblja – Staro, Srednje i Novo kraljevstvo.
Ujedinjenje Donjeg i Gornjeg kraljevstva dovelo je u pitanje religiju jer su sva veća središta štovala svoja božanstva. Kako je faraon slovio za potomka i poslanika bogova, točnije za reinkarnaciju boga Horusa, bilo je potrebno unificirati vjerovanja naroda u cilju sprječavanja kaosa i utvrđivanja vlasti. Svećeničko je vijeće prepravljalo i komponiralo različite doktrine te na kraju proglasilo doktrinu velike Eneade (skupine devet bogova) s vrhovnim bogom sunca Ra te Ozirisom i Izidom (Horusovim roditeljima) kao pripadnicima velike devetorice čime je potvrđeno faraonovo božansko porijeklo. Stari Egipćani su

Slika 1.1: Zemljopisna karta Starog Egipta (izvor: `http://timerime.com/es/evento/134323/Old+kingdom+Period/`)

posebno njegovali kult zagrobnog života. Vjerovali su da je za faraona smrt početak novog života. Njegovoj duši je bilo potrebno truplo kako bi nastavila živjeti u zagrobnom svijetu i upravo su iz tog razloga provodili balzamiranje i mumifikaciju te pažljivo birali grobna mjesta.

Hijeroglifsko pismo sadrži više stotina znakova u obliku slika koje simboliziraju riječi, slo-

Slika 1.2: Hijeroglifsko pismo (izvor: `http://www.ancient-egypt-online.com/ancient-egyptian-hieroglyphics.html`)

gove ili slova. To je ujedno prvo pismo kojim su pisali stari Egipćani i to zdesna na lijevo, rjeđe odozgo prema dolje. Početkom upotrebe papirusa prešli su na drugo, hijeratsko pismo. Ono se smatra pisanim oblikom hijeroglifa, a karakteriziraju ga vrlo pojednostavljeni znakovi koje je često teško dešifrirati. Treće staroegipatsko pismo je demotsko, nastalo zbog promjena u egipatskom jeziku pod utjecajem drugih kultura. Koristilo se najviše u svakodnevnom životu dok se u religiji zadržalo hijeroglifsko i hijeratsko pismo.
Kamen iz Rosette, gradića na delti Nila, omogućio je dešifriranje hijeroglifskog i demotskog pisma. Otkrili su ga Napoleonovi vojnici prilikom ekspedicije 1799. godine. Kamen je od crnog granodiorita i podijeljen na 3 dijela - donji dio je pisan grčkim, središnji demotskim, a gornji hijeroglifskim pismom. Napoleon je zadužio stručnjake da prouče kamen iz Rosette, no 1801. bio je primoran prepustiti ga Velikoj Britaniji. Dešifriranje se nastavilo i potrajalo ukupno 23 godine. Francuz Jean François Champollion (1790.-1832.) je pritom odigrao ključnu ulogu. Posvećen egiptologiji još od djetinjstva, s 11 godina je dao obećanje da će odgonetnuti do tada nepoznato pismo. Do 1822. godine je sastavio leksikon hijeroglifa i preveo gornju ploču kamena iz Rosette. Kasnije je pomoću uokvirenih simbola pronađenih na jednom od staroegipatskih obeliska pronašao vezu između pojedinih hijeroglifa i grčkih slova. Nažalost, umro je nedugo nakon otkrića pa je njegovo djelo *Grammaire Egyptienne en Encriture Hieroglyphique* objavljeno posthumno 1843. godine. U njemu je iznio gramatiku i postupak dešifriranja po kojem su egiptolozi dalje prevodili pronađene tekstove.

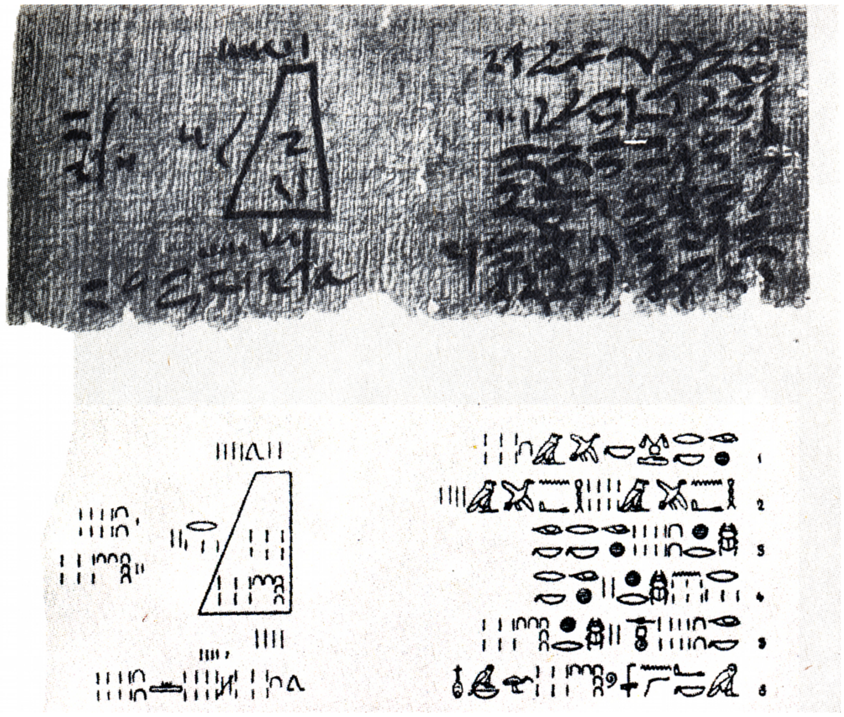
Poglavlje 2

Staroegipatska matematika

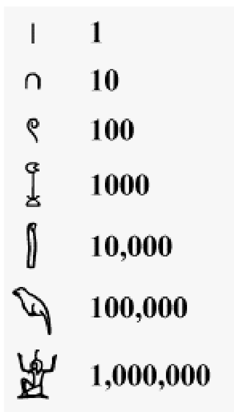
Teško je pojmiti da bi ijedna građevina starog Egipta nastala i opstala bez primjene matematike. Računanje poreza, trgovina i mjerenje zemljišta također su zahtijevali matematička znanja. Svake godine nakon poplave Nila izbrisale bi se granice zemljišnih posjeda i bilo je potrebno iznova ih odrediti mjerenjem. Odatle potječe i naziv jedne od grana matematike – geometrija u prijevodu s grčkog znači "mjerenje zemlje".

O staroegipatskoj matematici najviše se saznalo iz dva papirusa – Rhindovog i Moskovskog. Rhindov ili Ahmesov papirus širok je oko 30 centimetara i dugačak 6 metara, a sadrži 85 matematičkih problema (zadataka). Pretpostavlja se da ga je napisao pisar Ahmes oko 1650. godine prije Krista. Škotski egiptolog Alexander Henry Rhind kupio ga je u Luxoru 1858. godine te oporučno ostavio British Museum-u u Londonu gdje se i danas nalazi. Moskovski papirus je svitak širine 8 centimetara, dužine 6 metara i sadrži 25 matematičkih problema. Od 1909. godine čuva se u Muzeju likovnih umjetnosti u Moskvi kojem ga je prodao prvotni vlasnik Vladimir Goleniščev.

Brojevi su se označavali hijeroglifima inspiriranima prirodom i svakodnevnim životom. Brojevi od 1 do 9 označavali su se vertikalnim potezima, iako se u pojedinim rukopisima pojavljuju i neke specijalne oznake poput zvijezde za broj 5 ili ljudske glave za 7 zbog sedam otvora koji se na njoj nalaze. Nisu imali znak za nulu, već su ostavljali prazan prostor na mjestu gdje bi trebala biti. Oznaka za broj 10 je potkova koja ima deset rupa, za 100 uže za mjerenje od sto lakata duljine, 1000 predstavlja lopoč jer ih je na tisuće prekrivalo jezera, a 100000 gušterica zbog velikog broja u kojem su nastanjivale obalu Nila nakon poplave. Najjednostavnije je bilo brojiti na prste, što je rezultiralo korištenjem dekadskog brojevnog sustava. Istaknuvši posebno brojeve koji su potencije broja 10, sve ostale brojeve su prikazivali pomoću njih, odnosno aditivno notirali. Pritom su, kao i u pismu općenito, pisali zdesna na lijevo pa su veće jedinice s desne strane u odnosu na manje.



Slika 2.1: Moskovski papirus (izvor: `http://atlantablackstar.com/2014/10/03/5-examples-of-african-math-before-europe-could-read-or-write/4/`)



Slika 2.2: Oznake brojeva u starom Egiptu (izvor: `http://www.bakimliyiz.com/egitim-ve-ogretim/118181-eski-misirlilar-da-matematik-misirllarda-matematik-tarihi.html`)

Stari su Egipćani koristili lakat kao mjernu jedinicu za duljinu. Lakat se dijelio na dlanove, a dlanovi na 4 prsta. Razlikovali su mali lakat i kraljevski lakat. Mali lakat je odgovarao duljini 6 dlanova (24 prsta), a kraljevski lakat duljini 7 dlanova (28 prstiju). Iako se iz ovakve podjele čini da je dlan bio osnovna mjerna jedinica, mali lakat je imao zanemarivo malu uporabu. U arhitekturi starog Egipta gotovo uvijek se koristio kraljevski lakat i sve veće mjerne jedinice za duljinu, kao i one za površinu i volumen, izražene su pomoću njega.

2.1 Računske operacije

Ni u jednom od papirusa matematičkog sadržaja nisu zabilježene metode kojima su stari Egipćani zbrajali i oduzimali. Pretpostavlja se stoga da su koristili tablice pomoću kojih su iščitavali nepoznatu veličinu. Za množenje i dijeljenje, naprotiv, postoji mnogo primjera. Množenje je u staroegipatskoj matematici aditivno – jedan od faktora se uzastopno udvostručuje i odgovarajući razultati se zbrajaju kako bi se dobio umnožak. U primjeru 2.1.1 prikazan je staroegipatski način množenja brojeva 13 i 23. Prvo se odredi faktor koji će se uzastopno udvostručavati (23). Proces prestaje na najvećem faktoru u međukoraku koji je manji od početnog faktora kojeg nismo udvostručavali (8 < 13, 16 > 13).

Primjer 2.1.1.

$$\begin{array}{rr} \mathbf{1} & 23 \\ 2 & 46 \\ \mathbf{4} & 92 \\ \mathbf{8} & 184 \\ \hline \mathbf{13} & 299 \end{array}$$

Kako je 13 = 1 + 4 + 8, traženi umnožak je zbroj brojeva koji su s desne strane pridruženi brojevima 1, 4 i 8. $299 = 23 + 92 + 184 = (1 + 4 + 8) \cdot 23 = 13 \cdot 23$.

Dijeljenje na staroegipatski način vrlo je slično množenju, mogli bismo ga nazvati obrnutim množenjem. Djelitelj se uzastopno udvostručava dok se u procesu ne dođe do broja koji je veći od djeljenika. Takav postupak ilustriran je na primjeru dijeljenja 234 brojem 9.

Primjer 2.1.2.

$$\begin{array}{rr} 1 & 9 \\ \mathbf{2} & 18 \\ 4 & 36 \\ \mathbf{8} & 72 \\ \mathbf{16} & 144 \\ \hline \mathbf{26} & 234 \end{array}$$

Dobiveni brojevi s desne strane kombiniraju se tako da u zbroju daju djeljenika, broj 234. $234 = 18 + 72 + 144 = (2 + 8 + 16) \cdot 9 = 26 \cdot 9$. Zbrajanjem odgovarajućih brojeva s lijeve strane dobiva se količnik 26.

Postupci množenja i dijeljenja koje su koristili stari Egipćani čine se kompliciranima jer treba uočiti odgovarajuće pribrojnike pa prevladava mišljenje da su koristili tablice zbrojeva. Na primjeru množenja i dijeljenja bi se dalo zaključiti da je oduzimanje bilo obrnuto zbrajanje, odnosno da su tražili razliku kao onaj broj koji zbrojen s umanjiteljem daje umanjenika.

2.2 Egipatski razlomci

Jedinični razlomak je razlomak oblika $\frac{1}{n}$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Razlomak koji je prikazan kao suma jediničnih razlomaka različitih nazivnika nazivamo egipatskim razlomkom. Naime, stari su Egipćani na taj način prikazivali sve razlomke osim $\frac{2}{3}$. Egipatski razlomak u širem smislu je razlomak koji se može zapisati kao suma jediničnih razlomaka od kojih se neki mogu ponavljati.
Pretpostavlja se da su stari Egipćani do takvog prikaza došli postupkom sličnim običnom dijeljenju.

Primjer 2.2.1. *Egipatski razlomak broja* $\frac{4}{5}$.

1	5
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$2 + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$1 + \frac{1}{4}$
$\mathbf{\frac{1}{5}}$	1
$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbf{\frac{1}{2}} + \mathbf{\frac{1}{5}} + \mathbf{\frac{1}{10}}$	$4 = 2 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}$

Djeljeniku (nazivniku), broju 5, s lijeve se strane pripisuje broj 1 te se ta dva broja uzastopno raspolavljaju do zadnjeg broja s desne strane koji je veći od broja 1. Zatim se na desnoj strani zapisuje broj jedan te mu se s lijeve pripisuje odgovarajući broj, $\frac{1}{5}$. Postupak raspolavljanja se nastavlja sve dok se s desne strane ne dobiju pribrojnici koji zbrojeni daju djeljenik, broj 4, odnosno brojnik početnog nazivnika. Zbroj odgovarajućih brojeva s lijeve strane je egipatski zapis broja $\frac{4}{5}$.

Stari su Egipćani znali dijeliti s ostatkom, pri čemu su ostatak uvijek zapisivali kao zbroj jediničnih razlomaka. Postupak dijeljenja broja 54 brojem 8 prikazan je u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2.2.

1	8
2	16
4	32
$\mathbf{\frac{1}{2}}$	4
$\mathbf{\frac{1}{4}}$	2
$\mathbf{6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$	$54 = 32 + 16 + 4 + 2$

U Rhindovom papirusu dana je tablica egipatskih razlomaka za razlomke oblika $\frac{2}{n}$, $n \in [5, 101]$, pri čemu je n neparan broj. Razlomci među njima čiji je nazivnik djeljiv s tri rastavljeni su na sumu po pravilu $\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$. Ostali su rastavljeni na sumu dva, tri ili četiri razlomka, no nije sasvim jasno zašto su odabrali upravo takav rastav s obzirom da za većinu nije jedinstven. Moguće je da su pratili sljedeća pravila:

1. Poželjno je da je broj u nazivniku što manji, a nijedan nije veći od 1000

2. Što manje jedničnih razlomaka u rastavu

3. Parni nazivnici su bili poželjniji od neparnih, osobito za početni član

4. Uvijek se razlomak s manjim brojem u nazivniku zapisivao ispred onog s većim, npr. $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$, a ne $\frac{1}{7} + \frac{1}{3}$

5. Zapis $\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$ je imao prednost pred $\frac{2}{31} = \frac{1}{18} + \frac{1}{186} + \frac{1}{279}$ iako je $20 > 18$ zato što su se smanjili brojevi u ostalim članovima rastava

Množenje i dijeljenje razlomaka staroegipatskim načinom je analogno onom prirodnih brojeva, uz korištenje jednakosti $2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$.

Brojni su matematičari proučavali egipatske razlomke, posebno kako što brže i lakše doći od "običnog" do egipatskog. Postoji nekoliko algoritama pomoću kojih se razlomak rastavi na sumu jediničnih. U ovom radu pojasnit će se Fibonacci-Sylvesterov, "rastavljajući" ili takozvani "splitting" algoritam te Fareyev algoritam.

Fibonacci-Sylvesterov algoritam

Još je u srednjem vijeku talijanski matematičar Leonardo iz Pise poznatiji pod imenom Fibonacci (1170.-1250.) koristio algoritam za egipatske razlomke koji je opisao u knjizi Liber Abaci iz 1202. godine. Engleski matematičar J. J. Sylvester (1814.-1897.) ponovno je otkrio isti algoritam krajem 19. stoljeća pa nosi naziv po obojici.

Neka je $\frac{a}{b}$ pravi neskrativi razlomak, $0 < \frac{a}{b} < 1$. Najprije je potrebno odrediti prirodni broj n_1 koji zadovoljava nejednakost $\frac{1}{n_1} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{n_1-1}$, odnosno $n_1 - 1 < \frac{b}{a} \leq n_1$. Iz toga slijedi $n_1a - a < b \leq n_1a$ i dalje $n_1a - b < a$.
Oduzimanjem $\frac{1}{n_1}$ od $\frac{a}{b}$ dobije se:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} = \frac{n_1a - b}{bn_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{a_1}{b_1}$$

Vrijedi $a_1 = n_1a - b < a$ pa je vrijednost brojnika novog razlomka manja od vrijednosti brojnika početnog. Ako je $a_1 = 1$ rastav je završen. Ako nije, postupak se ponavlja za $\frac{a_1}{b_1}$ i dobiva se $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{a_2}{b_2}$. Postupak se ponavlja do razlomka $\frac{a_k}{b_k}$ za koji je $a_k = 1$ i egipatski razlomak je oblika $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_k} + \frac{1}{b_k}$.

Primjer 2.2.3. $\frac{3}{11}$ *kao egipatski razlomak*

$$3 < \frac{11}{3} < 4$$

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{1}{3}$$

$$n_1 = 4$$

$$\frac{3}{11} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 11}{11 \cdot 4} = \frac{1}{44}$$

$$\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44}$$

Primjer 2.2.4. $\frac{3}{4}$ *kao egipatski razlomak*

$$1 < \frac{4}{3} < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$$

$$n_1 = 2$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3 - 2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

”Rastavljajući” ili ”splitting” algoritam

Rastavljajuću ili ”splitting” metodu prvi je put opisao B. M. Stewart 1964. godine. P. J. Campbell je 1979. godine istaknuo da se radi o algoritmu, odnosno da takva metoda završava u konačnom broju koraka, no nije to dokazao. Na dokaz se čekalo do 1993. godine, kada je to učinio Laurent Beeckmans.

Karakteristika "splitting" algoritma je rastavljanje razlomka na jedinične uz ponavljanja, a zatim njihovo rastavljanje na različite jedinične razlomke korištenjem takozvanog splitting identiteta $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$.

Primjer 2.2.5.

$$\begin{aligned}\frac{2}{13} &= \frac{1}{13} + \frac{1}{13}\\ &= \frac{1}{13} + \frac{1}{13+1} + \frac{1}{13\cdot(13+1)}\\ &= \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{13\cdot 14}\\ &= \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{182}\end{aligned}$$

Primjer 2.2.6.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right)\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) + \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{420}\right)\\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \frac{1}{30} + \frac{1}{420}\end{aligned}$$

Fareyev algoritam

John Farey (1766.-1826.), engleski geolog i istraživač, 1816. godine objavio je članak u kojem je opisao niz neskrativih razlomaka za koje je naslutio zanimljiva svojstva koja je kasnije iste godine dokazao francuski matematičar Augustin Louis Cauchy (1789.-1857.).

Definicija 2.2.7. *Fareyevim nizom F_n naziva se skup neskrativih razlomaka $\frac{a}{b}$, $b \leq n$, $\frac{a}{b} \in [0, 1]$ poredanih po veličini počevši s najmanjim.*

Takozvanim Fareyevim procesom dobiva se tablica Fareyevih razlomaka. Prelaženjem iz poznatog n-tog nivoa u nepoznati $(n+1)$-vi nivo gledaju se samo susjedni neskrativi razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ za koje vrijedi $b + d \leq n + 1$. U $(n+1)$-om redu između njih se umeće medijan - razlomak $\frac{a+c}{b+d}$ u neskrativom obliku za kojeg vrijedi $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Primjerice, između $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{2}$ u trećem će se nivou umetnuti $\frac{0+1}{1+2} = \frac{1}{3}$.

F_1	$\frac{0}{1}$																						$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$											$\frac{1}{2}$											$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$							$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$							$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$					$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$				$\frac{1}{1}$
F_6	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$			$\frac{1}{1}$
F_7	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$		$\frac{1}{1}$
F_8	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{1}$

Tablica 2.1: Tablica Fareyevih razlomaka od F_1 do F_8

Fareyev algoritam razlomak koji pripada Fareyevom nizu, odnosno neskrativ je i pripada intervalu $[0, 1]$, rastavlja na sumu jediničnih razlomaka. Postupak će se pojasniti na primjeru razlomka $\frac{3}{4}$.

Primjer 2.2.8. *Zapis $\frac{3}{4}$ kao egipatskog razlomka pomoću Fareyevog algoritma*

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} &= \frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Razlomak $\frac{3}{4}$ prvi se put pojavljuje u nizu F_4 jer mu je u nazivniku broj 4 te se u tom nizu traži najveći razlomak manji od $\frac{3}{4}$, a to je $\frac{2}{3}$. Umnožak brojeva koji se nalaze u nazivnicima tih dvaju razlomaka , broj 12 $(4 \cdot 3)$, je broj u nazivniku prvog jediničnog razlomka u rastavu. Zatim se promatra niz F_3, gdje se prvi put pojavljuje $\frac{2}{3}$. Najveći razlomak u tom nizu koji je manji od njega je $\frac{1}{2}$ pa je drugi pribrojnik $\frac{1}{6}$ jer je $6 = 3 \cdot 2$. Razlomak $\frac{1}{2}$ prvi se put pojavljuje u nizu F_2 i jedini manji razlomak od njega u tom nizu je $\frac{0}{1}$ te je treći pribrojnik razlomak $\frac{1}{2}$, s obzirom da je $2 \cdot 1 = 2$. On je ujedno i posljednji pribrojnik jer je $\frac{0}{1}$ najmanji Fareyev razlomak.

Na primjeru razlomka $\frac{3}{4}$ vidi se da se različitim algoritmima dobivaju i različiti zapisi u obliku egipatskog razlomka. Fibonacci-Sylvesterov daje najkraći rastav - samo dva pribrojnika, Fareyev algoritam u rastavu ima tri pribrojnika, a "rastavljajući" čak sedam. Fibonacci-Sylvesterov algoritam neće uvijek dati najkraći zapis u obliku egipatskog razlomka i moguće je dobiti isti zapis pomoću različitih algoritama. Na web stranici [20] nalazi se nekoliko kalkulatora za egipatske razlomke pri čemu se mogu odabrati određene karakteristike kao što su broj pribrojnika, najkraći rastav ili zadani pribrojnici.

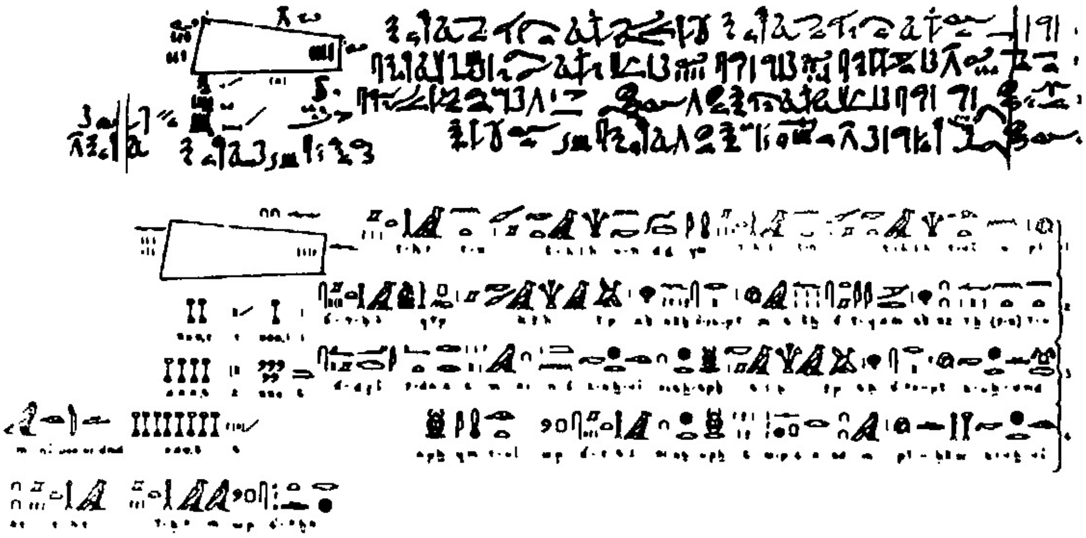
2.3 Površine i volumeni

Površina pravokutnika i trapezoida

Površinu pravokutnika stari su Egipćani računali ispravno, kao umnožak duljina dviju susjednih stranica. Primjer je jedan od zadataka (problema) na Rhindovom papirusu u kojem je potrebno izračunati površinu pravokutnika sa stranicama duljina 10 kheta i 1 khet (1 khet=100 lakata).

Drugi zadatak, Problem 52, zahtijeva računanje površine trapeza kojeg su Egipćani opisivali kao krnji trokut. Skica nalikuje na jednakokračni trapez, a sam tekst zadatka se može shvatiti na dva bitno različita načina. Zadane su duljine osnovica 4 i 6, a duljina 20 se može prevesti kao strana (krak) ili visina. Površina je dobivena kao polovica zbroja duljina osnovica pomnožena sa 20, što je točno ako se radi o visini. Ukoliko je 20 duljina kraka, površina je pogrešno izračunata, no ta je greška zanemariva u praktičnoj primjeni.

Zapis o računanju površine trapezoida (općeg četverokuta) pronađen je na stijeni hrama u Edfu-u. Prema njemu, površina trapezoida jednaka je umnošku poluzbroja parova nasuprotnih stranica. Matematičkim jezikom, površina četverokuta sa stranicama duljina a, b, c i d iznosi $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, gdje su a i c te b i d parovi nasuprotnih stranica. Ta je formula ispravna za pravokutnik, a za četverokute koji malo odstupaju od pravokutnika daje zanemarivu pogrešku za praktične svrhe.



Slika 2.3: Problem 52 iz Rhindovog papirusa zapisan na hijeroglifskom i hijeratskom pismu (Clagett, *Ancient Egyptian Science: A Source Book*, *Volume Three: Ancient Egyptian Mathematics*, fig. lV.2kk)

Površina kruga

Na Rhindovom papirusu zapisana je metoda računanja površine kruga. Ako je krug promjera 9 kheta od promjera se oduzme $\frac{1}{9}$. Zatim se ostatak (8) pomnoži sam sa sobom što daje 64 i to je tražena površina. Dakle, staroegipatska formula za površinu kruga glasi:

$$P = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2.$$

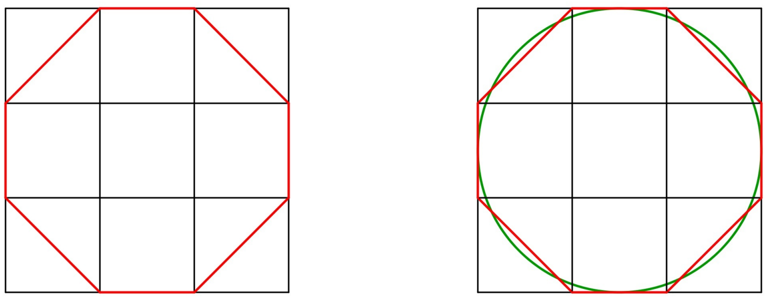
Ako se usporedi s točnom formulom, dobije se dobra aproksimacija broja π :

$$P = r^2\pi \qquad P = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

$$P = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \qquad P = d^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

$$d^2 \cdot \frac{\pi}{4} = d^2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2$$
$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$
$$\pi = 4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3.1605$$

Skica pokraj 48. zadatka na Rhindovom papirusu sugerira kako su došli do formule. Prikazuje kvadrat stranice duljine 9 kheta podijeljen na osmerokut i četiri jednakokračna pravokutna trokuta čije su katete duljine 3 kheta. Usporedimo li tako dobiven osmerokut i krug koji je upisan u taj isti kvadrat, možemo vidjeti da su njihove površine približno jednake.



Slika 2.4: Usporedba površina kruga i osmerokuta

Površina pravokutnog trokuta iznosi $P = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$, što znači da je površina osmerokuta jednaka $81 - 4 \cdot \frac{9}{2} = 63$. Vidi se da je približno jednaka površini kruga promjera 9 pa je moguće da je upravo ta usporedba rezultirala računanjem na prethodno opisani način.

Volumen krnje piramide

Moskovski papirus sadrži najveće matematičko postignuće starih Egipćana, a to je ispravna formula za računanje volumena krnje piramide kojoj su baze kvadrati. Naravno, nisu je zapisivali u obliku u kojem je mi danas poznajemo već je to bio niz uputa.

”Neka je dana krnja piramida čija duljina visine iznosi 6, a duljine bridova baze 4 i 2. Kvadriraj 4, to je 16. Udvostruči 4, rezultat je 8. Kvadriraj 2, to je 4. Zbroji 16, 8 i 4, rezultat je 28. Uzmi $\frac{1}{3}$ od 6, to je 2. Pomnoži 28 sa 2 i konačni rezultat je 56.”

Uvrštavanjem danih parametara u formulu $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$, gdje je $h = 6$, $a = 4$ i $b = 2$ dobije se isti rezultat.

$$V = \frac{h}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$
$$V = \frac{6}{3} \cdot (4^2 + 4 \cdot 2 + 2^2)$$
$$V = 2 \cdot (16 + 8 + 4)$$
$$V = 2 \cdot 28$$
$$V = 56$$

Pretpostavlja se da su znali izračunati i volumen pravilne četverostrane piramide, no ne postoji dokaz koji potkrepljuje tu tvrdnju.

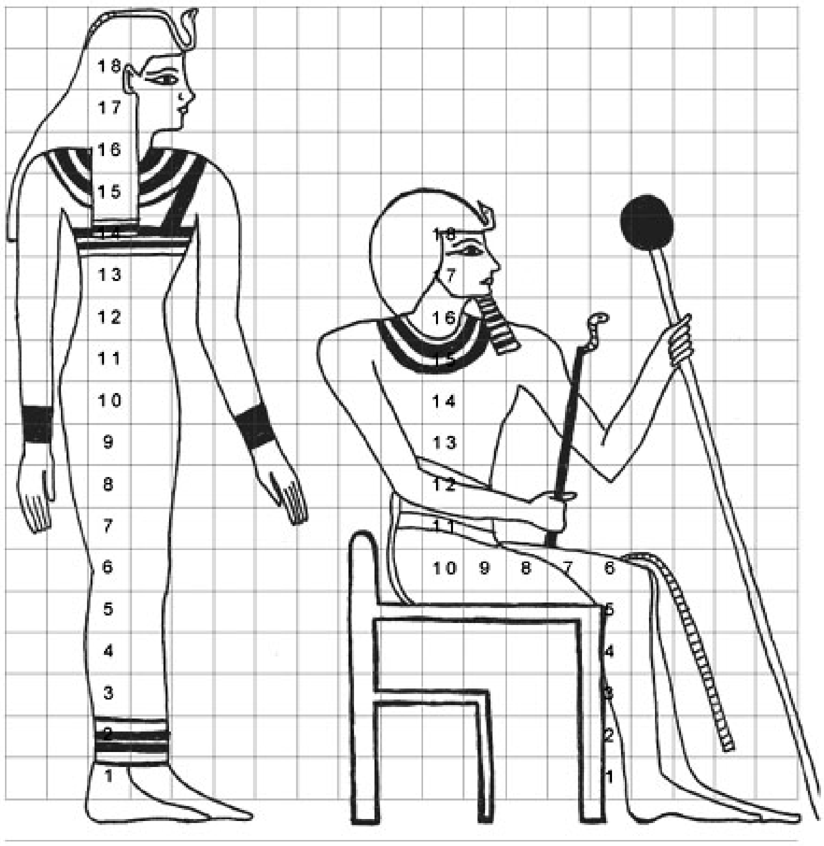
Poglavlje 3

Matematika u staroegipatskoj umjetnosti i hramovima

Svakodnevni život i religija glavne su okosnice kulture starog Egipta. Najviše se, dakako, očituju u umjetnosti. Likovi na freskama i reljefima su plošne strukture s izraženim hijerarhijskim obilježjima, a najzastupljeniji su bogovi i faraon sa svojom obitelji. Njima su posvećeni hramovi i većina kipova, koje sve odlikuje simetričnost. Proučavanjem staroegipatske umjetnosti i arhitekture uočene su još neke pravilnosti što je dovelo do brojnih teorija o nastanku njihovih djela.

3.1 Egipatski kanon i zlatni rez

Oblikovanje skulptura i slika koje prikazuju ljudsko tijelo u starom je Egiptu bilo određeno kompozicijskim zakonom koji danas nazivamo Egipatski kanon. Na slikama su samo ramena i oko nacrtani en face, sve ostalo je u profilu. Istaknutim dijelovima tijela bio je pridružen unaprijed zadan položaj na kvadratnoj mreži. Čelo se nalazilo na visini 18. kvadrata računajući od stopala, pupak na 11. kvadratu, nosnice na 17. kvadratu i sl. U kasnijem periodu, vjerojatno za vrijeme XXV Dinastije, čelo se nalazilo na visini 21. kvadrata od stopala. Kvadratne mreže nisu bile precizne već su služile kao grubi predložak za pozicioniranje i crtanje ljudskih tijela, no s matematičkog stajališta zanimljivo je uočiti potrebu za "organiziranjem ravnine", odnosno začetke koordinatnog sustava. U prikazu ljudskog tijela pomoću kvadratne mreže omjer položaja čela (18. kvadrat) i pupka (11. kvadrat) iznosi 1.636. Kasnije, prijelazom na kvadratnu mrežu gdje je čelo na visini 21. kvadrata, a pupak na visini 13. kvadrata omjer se smanjuje na 1.615 te postaje još bolja aproksimacija vrijednosti poznate pod nazivom zlatni rez.



Slika 3.1: Egipatski kanon (izvor: `http://www.historymuseum.ca/cmc/exhibitions/civil/egypt/egcw05e.shtml`)

Definicija 3.1.1. *Za dvije veličine kažemo da su u omjeru zlatnog reza (zlatnom omjeru) ako vrijedi da se veći dio odnosi prema manjem kao cjelina prema većem dijelu.*

Za dužinu, na primjer, kažemo da je jednom svojom točkom podijeljena u omjeru zlatnog reza ako se cijela dužina odnosi prema većem dijelu kao veći dio prema manjem.

Iz same definicije lako se izračuna numerička vrijednost zlatnog reza koju označavamo s Φ.

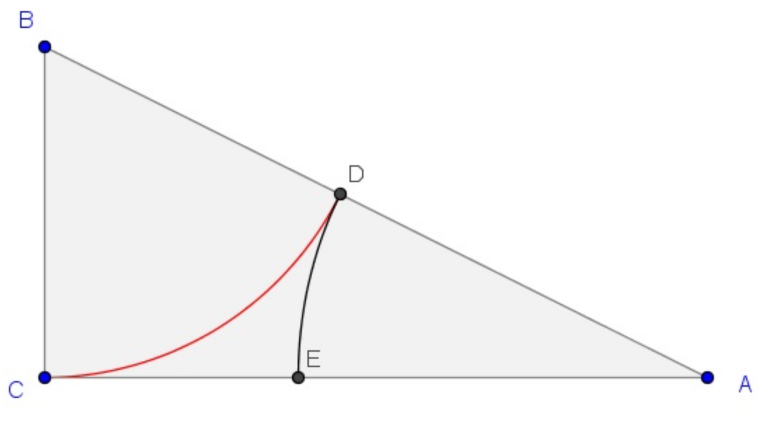
Za dužinu duljine $a+b$, pri čemu je $a < b$, podijeljenu na a i b u omjeru zlatnog reza vrijedi:

$$(a+b) : b = b : a$$
$$a^2 + ab = b^2$$

Ako uzmemo da manji dio iznosi 1, dobivamo:

$$1 + b = b^2$$
$$b^2 - b - 1 = 0$$
$$b = \frac{1 + \sqrt{1+4}}{2}$$
$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 = \Phi$$

Jednostavna konstrukcija točke koja dijeli dužinu u zlatnom omjeru može se izvesti pomoću pravokutnog trokuta. Dužina $\overline{AC}$ je duža kateta pravokutnog trokuta ABC i vrijedi $2|BC| = |AC|$. Presjek hipotenuze $\overline{AB}$ i kružnice sa središtem u B polumjera $|BC|$ je točka D. Konstruiramo kružnicu sa središtem u A polumjera $|AD|$ koja siječe $\overline{AC}$ u točki E. Točka E tada dijeli dužinu $\overline{AC}$ u omjeru zlatnog reza.

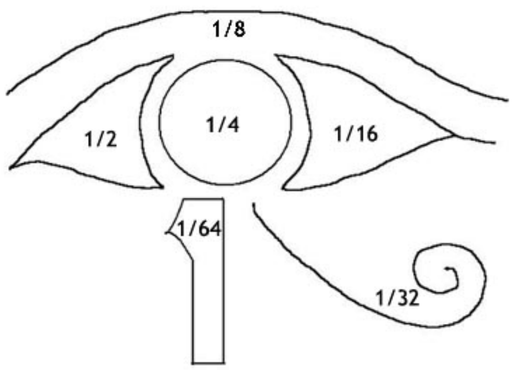


Slika 3.2: Konstrukcija zlatnog reza

Zlatni rez se često pojavljuje u geometriji, ali i općenito u matematici. Osnova je velikog broja arhitektonskih objekata i umjetnina pa su ga mnogi istraživači pronašli u staroegipatskoj umjetnosti. Ipak, ne postoje dokazi da je zlatni rez tamo prisutan s namjerom ili da su stari Egipćani znali za njegova svojstva i konstrukciju.

3.2 Horusovo oko

Po egipatskoj mitologiji Horus je pobijedio boga Setha u borbi za prijestolje, no pritom je izgubio lijevo oko koje je Seth razlomio na šest dijelova. Bog mudrosti Toth izliječio je Horusa i vratio mu oko koje je od tada simbol za izvor života i svjetlosti te zaštita od negativnih utjecaja. U matematici starog Egipta Horusovo je oko predstavljalo cjelinu, a šest dijelova na koje je podijeljeno razlomke od kojih je svaki upola manji od prethodnog, počevši sa $\frac{1}{2}$ i završno s $\frac{1}{64}$. Podijeljeno na taj način se koristilo isključivo kao mjera za žitarice.



Slika 3.3: Horusovo oko (izvor: `https://olimex.wordpress.com/horus-eye-fraction/`)

3.3 Hramovi starog Egipta

U traženju matematičkih pravilnosti staroegipatske arhitekture, pa tako i hramova, najviše rezultata dobiveno je uočavanjem raznih trokuta. Među njima se ističu tri karakteristična: egipatski, jednakostranični i jednakokračni trokut kojemu omjer duljina osnovice i visine na osnovicu iznosi 8:5.

Karakteristični trokuti

Egipatskim se **trokutom** naziva pravokutni trokut čije su katete duljine 3 i 4, a hipotenuza duljine 5. Nagađa se kako su upotrebom konopa podijeljenog na 12 čvorova stari Egipćani konstruirali egipatski trokut, a time i pravi kut te ga koristili daljnjim konstrukcijama. U Dolini kraljeva, ispred grobnice Ramzesa VI, pronađena je u kamen uklesana skica eliptičnog svoda. Položaj fokusa i duljine velike i male poluosi elipse određeni su pomoću egipatskog trokuta (dva trokuta prislonjena jedan uz drugi), nakon čega je elipsa konstruirana vrtlarskom konstrukcijom pomoću konopa i dva klina.

Važnost **jednakostraničnog trokuta** u starom Egiptu se ne može zanijekati. Upravo je takvog oblika trebao biti vertikalni presjek prve piramide (Savijene piramide), no pretpostavlja se da je zbog nestabilnosti konstrukcije dvaput došlo do promjene plana gradnje što je rezultiralo njenim "savijenim" oblikom. Na temeljima hrama u Kalabshi pronađene su ucrtane linije koje tvore kut od 60° što sugerira da je jednakostranični trokut bio komponenta nacrta i ide u prilog raznim teorijama o konstrukciji hramova pomoću karakterističnih trokuta.

Jednakokračni trokut čije se duljine osnovice i visine na osnovicu odnose kao 8:5 ili kraće **8:5 trokut**, pojavljuje se u mnogim analizama i rekonstrukcijama nacrta staroegipatskih objekata. Razlog tomu je upravo omjer $8 : 5 = 1.6$, što je dobra aproksimacija broja Φ čije poznavanje mnogi žarko žele dokazati starim Egipćanima. Međutim, takav trokut im nije bio jednostavan za konstrukciju. Ako se duljina osnovice i visine na osnovicu jednakokračnog trokuta odnose kao 8:5, onda je duljina kraka iracionalan broj. S obzirom da stari Egipćani nisu poznavali iracionalne brojeve, teorija o korištenju takvog trokuta nema pravog uporišta.

Slutnja 3.3.1. *Duljina kraka 8:5 trokuta je iracionalan broj.*

Dokaz. Neka je zadan jednakokračan trokut kojemu se duljine osnovice a i visine na osnovicu v odnose kao $8 : 5$. Tada vrijedi:

$$a : v = 8 : 5$$

$$a = 8k, k \in \mathbb{Q}$$

$$v = 5k, k \in \mathbb{Q}$$

Po Pitagorinom poučku duljina kraka b iznosi:

$$\begin{aligned}
b^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 \\
b^2 &= \left(\frac{8k}{2}\right)^2 + (5k)^2 \\
b^2 &= (4k)^2 + (5k)^2 \\
b^2 &= 16k^2 + 25k^2 \\
b^2 &= 41k^2 \\
b &= \sqrt{41k^2} \\
b &= k \cdot \sqrt{41}
\end{aligned}$$

Iz $\sqrt{41} \notin \mathbb{Q}$ slijedi $b \notin \mathbb{Q}$.

$\square$

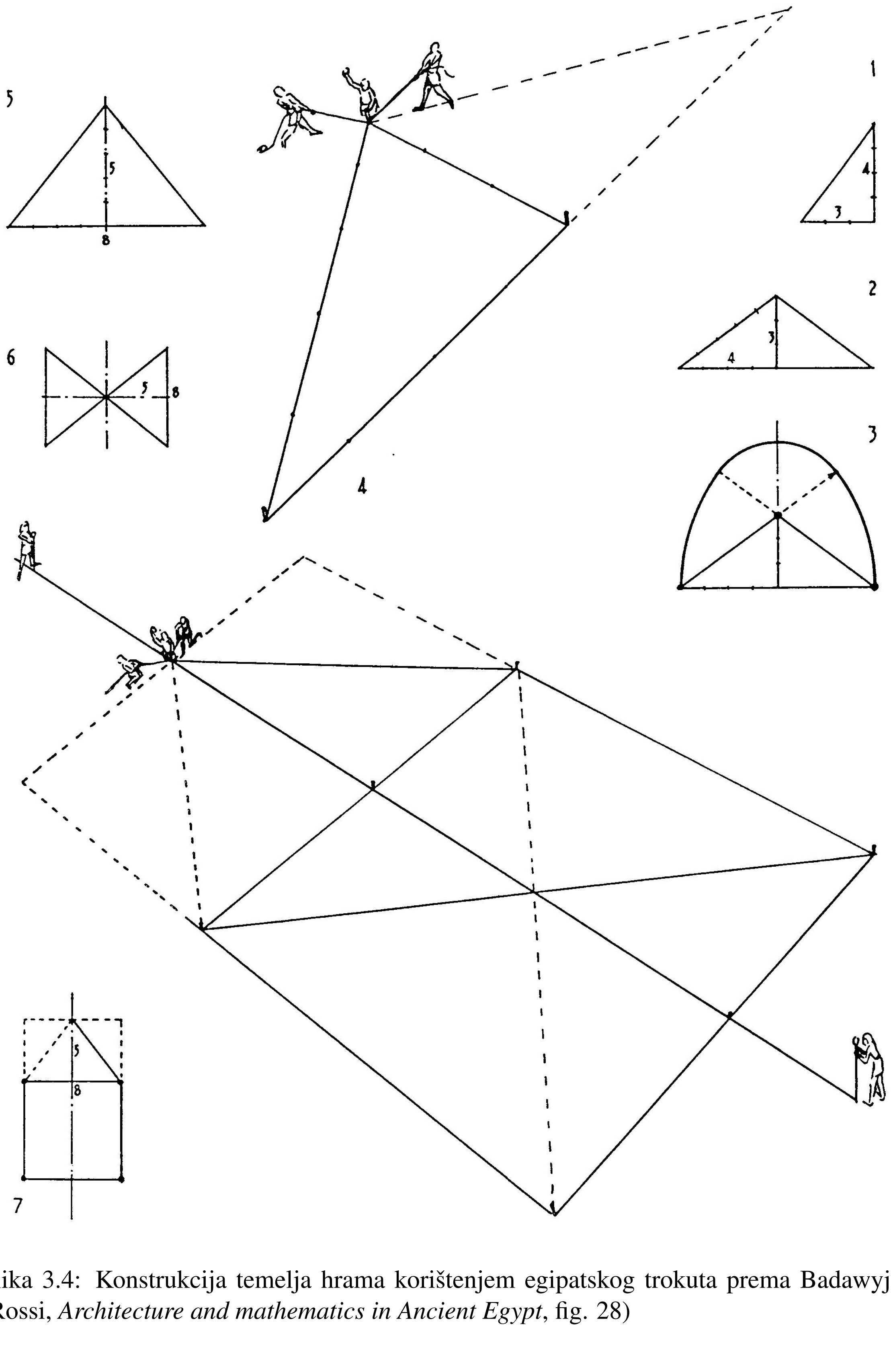
Osim temelja hrama u Kalabshi, nema dokaza o korištenju karakterističnih trokuta u nacrtima za izgradnju hramova te se ne može sa sigurnošću utvrditi koja su matematička znanja stari Egipćani pritom primjenjivali. Može se samo nagađati i pokušati implementirati njima poznata svojatva u nacrte napravljene po sadašnjem stanju građevina.

Teorija Alexandera Badawyja

Egipatski arhitekt i egiptolog Alexander Badawy 1965. je godine iznio svoju teoriju o planiranju i izgradnji staroegipatskih građevina. Po njemu je cjelokupna staroegipatska arhitektura zasnovana na omjeru zlatnog reza uz korištenje kvadrata, pravokutnika i nekoliko karakterističnih trokuta - egipatskog, 8:5 trokuta te jednakokračnih trokuta kojima je visina na osnovicu 1, 2 ili 4 puta dulja od osnovice, a nazvao ih je 1:2, 1:4 i 1:8. Izvedbu projekta opisao je nizom koraka. Arhitekti bi najprije konopom označili na tlu glavne osi te pomoću razvlačenja konopa u karakteristične trokute odredili važna mjesta za daljnje korake (slika 3.4). Nakon toga bi kombinacijom kvadrata i trokuta oblikovali vanjsku konturu građevine te mrežom trokuta uzduž osi obilježili položaj određenih objekata kao što su stupovi i ulazi. Badawy je svojom metodom uspio uspješno analizirati preko 55 nacrta staroegipatskih građevina, većinom hramova, daleko više od bilo kojeg drugog istraživača.

Postupak koji je opisao se sastoji od niza međusobno povezanih pravila i podrazumijeva korištenje alata koji su starim Egipćanima bili poznati, no ipak podliježe brojnim kritikama. Analizirani nacrti su napravljeni u sitnom mjerilu i mogu biti prilično nepravilni.

Mreža trokuta koja određuje položaj objekata odgovara nacrtu jer je rađena po njemu, bilo bi je neusporedivo teže konstruirati na tlu što bi staroegipatski arhitekti morali napraviti jer nisu koristili nacrte u mjerilu. Badawy za određivanje vanjske konture koristi trokute koji se na pojedinim mjestima preklapaju iako bi bilo jednostavnije koristiti pravokutnik, a sam je priznao da mrežom trokuta ne uspijeva obuhvatiti sve objekte konstrukcije. Uzeo je za činjenicu poznavanje i korištenje omjera zlatnog reza u staroegipatskoj arhitekturi zbog čega u većini analiziranih nacrta koristi 8:5 trokut čija se konstrukcija doima prezahtjevnom za praktičnu svrhu koju je trebala imati.



Slika 3.4: Konstrukcija temelja hrama korištenjem egipatskog trokuta prema Badawyju (Rossi, *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*, fig. 28)

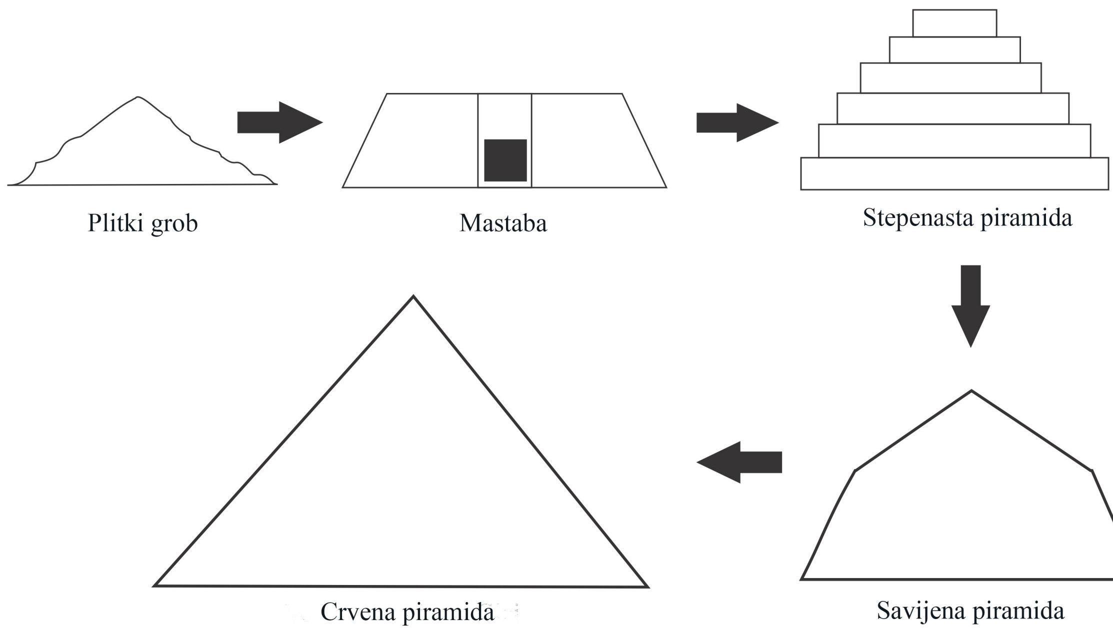
Poglavlje 4

Piramide

Prva asocijacija na Egipat zasigurno su piramide. Tisućljećima fasciniraju veličinom, formom, očuvanošću i složenošću naizgled jednostavnog kompleksa. Njihova je namjena dugo vremena bila upitna. Sumnjalo se da su služile kao grobnice, ali ograničen pristup njihovoj unutrašnjosti sprječavao je potvrdu te teorije. Arheolozi su otklonili sumnje tek u 19. stoljeću kad su uspjeli istražiti unutarnje prostorije gdje su pronašli mumije i imena faraona u pripadnim piramidama. Naziv piramida potječe od grčke riječi *pyramis* koja označava kolač od pšenice stožastog oblika. Stari su Egipćani koristili naziv *mer*, u prijevodu "mjesto uspona". Pridodamo li tome namjenu i religiju, jasno je zašto su piramide upravo te veličine i oblika. U očima starih Egipćana, faraonova grobnica je trebala omogućiti vladaru uspon na nebo kako bi se ujedinio sa svojim precima bogovima. Pustinjska klima i izdržljivi materijal omogućili su očuvanje kroz dugi vremenski period. Složenost je jedina karakteristika koja do današnjeg dana nije objašnjena. Osim računanja nagiba, nisu pronađeni zapisi matematičkih sadržaja povezanih s planiranjem i gradnjom piramide. Smatra se da su tajnu piramida čuvali svećenici te je međusobno prenosili iz generacije u generaciju.

4.1 Evolucija oblika

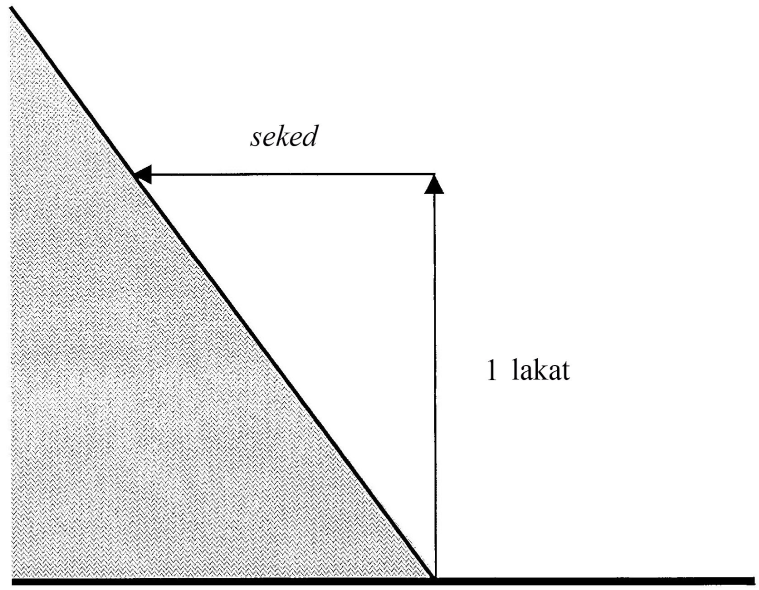
Plitki grobovi su se pokazali lošima za očuvanje tijela pokojnika zbog pustinjske klime i snažnih vjetrova, što je dovelo do potrebe za izgradnjom čvrstih i kvalitetnih grobnica. Prve takve grobnice bile su mastabe, građevine od nepečene opeke u obliku vrlo niske krnje piramide kojoj je baza pravokutnik. Težnja nebu dovela je do nove forme grobnica - stepenaste piramide. Prva takva je piramida faraona Zosera koju je dizajnirao Imhotep, nostitelj epiteta "prvi arhitekt". Dobivena je slaganjem mastaba jedne na drugu i znana kao najstarija egipatska kamena građevina. Faraon Huni je dao sagraditi stepenastu piramidu sličnu Zoserovoj, a za vladavine njegovog sina Snofrua piramide su poprimile pravilni oblik. Prva koju je dao sagraditi, takozvana Savijena piramida, nepravilnog je oblika. Pretpostavlja se da se to dogodilo zato što je tijekom gradnje dvaput došlo do promjene plana, odnosno nagiba. Crvena piramida, posljednja koja je sagrađena za Snofruove vladavine, pravilnog je geometrijskog oblika koji se od tada ustalio u gradnji, a dobiven je popunjavanjem stepenica blokovima i zaglađivanjem površine. Ime je dobila po crvenom vapnencu od kojeg je sagrađena, iako se na dnu može vidjeti da su nekoć preko njega bili postavljeni blokovi od bijelog vapnenca. Snofruov sin Keops je dao sagraditi najveću staroegipatsku piramidu - Keopsovu ili Veliku piramidu. Njegovom sinu Kefrenu pripada druga najveća piramida, a unuk Mikerin je dao sagraditi piramidu manjih proporcija. Keopsova, Kefrenova i Mikerinova piramida izgrađene su jedna pored druge i čine kompleks piramida u Gizi.



Slika 4.1: Evolucija oblika piramida starog Egipta (izvor: `https://tomverenna.wordpress.com/2012/06/12/giorgio-tsoukalos-on-the-preston-and-steve-show/`, obrađeno alatom Adobe Photoshop)

4.2 Seked

Prilikom planiranja gradnje piramide, stari su Egipćani računali nagib strane pomoću duljina baze i visine. Naziv *seked* označavao je horizontalni pomak strane za vertikalni pomak od jednog lakta. Te dvije veličine duljine su kateta pravokutnog trokuta koji je sličan polovici osnog presjeka piramide paralelnog sa bridom baze. U nekoliko zadataka na Rhindovom papirusu *seked* je dobiven kao omjer polovice duljine baze i duljine visine. Nijedan zapis ne govori o kutovima, no u praksi su ih morali uzeti u obzir. To je potaknulo na istraživanje mogućih metoda gradnje bez računanja kutova. Jedna od teorija zastupa korištenje drvenih pravokutnih trokuta s katetama duljina 1 lakat i *seked* pomoću kojih bi se nagib konstantno provjeravao tijekom gradnje. Iako nema dokaza koji ju potkrepljuju, nijedan ju ne pobija.



Slika 4.2: *Seked* (Rossi, *Architecture and mathematics in Ancient Egypt*, fig. 85, obrađeno alatom Adobe Photoshop)

4.3 Pitagorine trojke

Uređenu trojku prirodnih brojeva koja odgovara duljinama stranica pravokutnog trokuta nazivamo Pitagorina trojka. Za neke od takvih trokuta se smatra da su utkani u piramide starog Egipta kao polovice njihovog osnog presjeka.
Egipatski trokut jedan je od primjera Pitagorine trojke $(3, 4, 5)$, a njemu sličan trokut $(75, 100, 125)$ se pronalazi kao polovica osnog presjeka nekoliko piramida sagrađenih krajem Starog kraljevstva.

Druga Pitagorina trojka, $(20, 21, 29)$ pripisuje se Crvenoj piramidi faraona Snofrua, no kako nisu poznate njene točne dimenzije (velika odstupanja u različitim istraživanjima) to nije sigurno. Spomenuta trojka bi se javila ukoliko bi duljina baze bila 420 lakata i duljina visine 200 lakata.
Sekedu duljine 3 dlana i 3 prsta odgovara $(8, 15, 17)$ koji imaju dvije sporedne piramide, grobnice kraljica. *Seked* duljina 3 dlana se mogao dobiti pomoću Pitagorine trojke $(5, 12, 13)$, a 2 dlana pomoću $(7, 24, 25)$. Takva dva *sekeda* izmjerena su u piramidama Novog Kraljevstva.
Upotreba svih navedenih Pitagorinih trojki vrlo je upitna. Egipatski trokut se koristio za konstrukciju pravog kuta pa nije isključeno da su za istu svrhu poslužili i drugi pravokutni trokuti, a najpraktičniji izbor za duljine njihovih stranica su prirodni brojevi. Starim Egipćanima nije bio poznat Pitagorin teorem - u pravokutnim trokutima vidjeli su samo pravi kut.

4.4 Velika piramida

Keopsovu ili Veliku piramidu u Gizi krase brojni epiteti. Najveća je građevina antike i jedna od najvećih ikad napravljenih te najstarije i jedino sačuvano od sedam svjetskih čuda antike. Površina njene baze, gotovo savršenog kvadrata, jednaka je sumi površina firentinske, milanske, rimske te katedrale sv. Pavla i Westminsterske opatije u Londonu. Kao arhitektonsko čudo, bila je i ostala predmet brojnih istraživanja, ali i mistificiranja.

Φ i π u Velikoj piramidi

Proučavanjem Velike piramide istraživači su se nadali pronaći matematičke sadržaje koji će objasniti odabir njenih dimenzija. Jesu li matematičke zakonitosti uvjetovale odabir veličina ili su njihova posljedica? Dio istraživača uvjeren je da su Φ i π namjerno implementirani u Veliku piramidu i to na više različitih načina među kojima se ističu sljedeća tri.

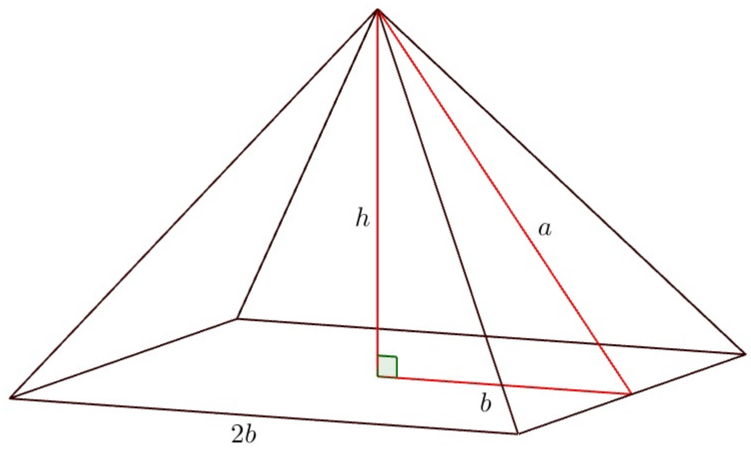
1. **Omjer poluopsega baze i duljine visine jednak je broju π.**
   Za duljinu brida baze Velike piramide uzima se 440 lakata, a za duljinu visine 280 lakata.

Slika 4.3: Keopsova piramida (izvor: `http://arounddeglobe.com/pyramids-giza-reminiscent-opulence-ancient-egypt/`)

$$\frac{\frac{o}{2}}{h} = \frac{\frac{4 \cdot 440}{2}}{280} = \frac{2 \cdot 440}{280} \approx 3.14286$$

Dobiveni broj vrlo dobro aproksimira vrijednost $\pi = 3.14159$.

2. **Površina svake pobočke jednaka je kvadratu duljine visine.**
   Neka je duljina brida baze $2b$, duljina visine h i a duljina visine na osnovicu pobočke. Tada površina pobočke iznosi $\frac{2b \cdot a}{2} = a \cdot b$.



Slika 4.4: Oznake veličina Velike piramide

$$h^2 = a \cdot b / : b^2$$
$$\frac{h^2}{b^2} = \frac{a}{b}$$

Po Pitagorinom poučku vrijedi $h^2 = a^2 - b^2$.

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a}{b}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1 = \frac{a}{b}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Iz dobivene jednadžbe slijedi $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

3. **Omjer površine pobočja i površine baze jednak je omjeru oplošja i površine pobočja.**
Pobočje čine četiri jednakokračna trokuta s osnovicom duljine $2b$ i visinom na osnovicu a te se njegova površina računa po formuli $P = 4 \cdot \frac{2b \cdot a}{2} = 4ab$.
Baza piramide je kvadrat čija površina iznosi $B = (2b)^2 = 4b^2$.

Oplošje piramide jednako je zbroju površine pobočja i površine baze: $O = P + B = 4ab + 4b^2$.

$$
\begin{aligned}
\frac{P}{B} &= \frac{O}{P} \\
\frac{4ab}{4b^2} &= \frac{4ab + 4b^2}{4ab} \\
\frac{4b \cdot a}{4b \cdot b} &= \frac{4b \cdot (a + b)}{4b \cdot a} \\
\frac{a}{b} &= \frac{a + b}{a}
\end{aligned}
$$

Dobivena jednakost vrijedi ukoliko su a i b u omjeru zlatnog reza.

Naizgled se sve tri pretpostavke čine ispravnima, ali potrebno je uzeti u obzir stvarne dimenzije Velike piramide. Duljina brida baze iznosi 230 metara, a duljina visine piramide je iznosila 147 metara (kroz godine se urušila za otprilike 10 metara).

1. **Omjer poluopsega baze i duljine visine jednak je broju π.**

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{o}{2}}{h} &= \frac{\frac{4 \cdot 230}{2}}{147} \\
&= \frac{2 \cdot 230}{147} \\
&\approx 3.12925
\end{aligned}
$$

Dobiveni broj je lošija aproksimacija broja $\pi = 3.14159$ u odnosu na vrijednost dobivenu uvrštavanjem dimenzija izraženih u laktovima.

2. **Površina svake pobočke jednaka je kvadratu duljine visine.**
U ovom slučaju dobije se da su duljine brida baze piramide i visine na osnovicu pobočke proizvoljne ukoliko vrijedi dana jednakost. Grčkom povjesničaru Herodotu su navodno egipatski svećenici rekli da su dimenzije Velike piramide odabrane s namjerom da površina svake pobočke bude istovjetna kvadratu duljine visine. Markowsky (vidi [12]) iznosi kritiku te pretpostavke navodeći kako ni autori koji je smatraju

točnom ne mogu objasniti razlog takvog odabira.

Za duljine izražene u laktovima vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{220^2 + 280^2}}{220} = 1.61859 = \Phi$$

Za duljine izražene u metrima vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{115^2 + 147^2}}{115} = 1.62294$$

3. **Omjer površine pobočja i površine baze jednak je omjeru oplošja i površine pobočja.**
   Jednakost $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ vrijedi ukoliko su a i b u omjeru zlatnog reza.
   Za duljine izražene u laktovima:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{\sqrt{220^2 + 280^2}}{220} = \frac{\sqrt{220^2 + 280^2} + 220}{\sqrt{220^2 + 280^2}}$$

$$\frac{\sqrt{317}}{11} = \frac{576.0899}{20\sqrt{317}}$$

$$1.6185 \approx 1.6178$$

   Za duljine izražene u metrima:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{\sqrt{115^2 + 147^2}}{115} = \frac{\sqrt{115^2 + 147^2} + 115}{\sqrt{115^2 + 147^2}}$$

$$1.622945 \approx 1.61616$$

Iz navedenih se primjera vidi da mala promjena u veličinama dovodi do većeg ili manjeg odstupanja u rezultatima. Neki arhitektonski objekti su oštećeni ili urušeni te se ne može dati točna procjena njihovih proporcija što ostavlja prostor za nagađanja. Ne postoje dokazi da su stari Egipćani poznavali ni koristili Φ ili π. Moguće je da su samo posljedica estetike i (ne)sretno odabranih brojeva pri konstrukciji, posebice zbog praktične prirode njihove matematike.

4.5 Piramide kao nadahnuće

Osim što su zadivile, piramide su i inspirirale mnoge kulture. Nakon osvajanja Egipta, Rimljani su prisvojii piramidalni oblik grobnice. Jedina sačuvana je ona Gaja Cestija, visoka 37 metara, a egzistenciju može zahvaliti zidinama u koje je uklopljena. U Nubiji su također pronađene piramide pravilnog oblika. Služile su kao kraljevske grobnice i bile znatno manjih dimenzija od egipatskh. Motiv piramide ostao je prisutan i u novom dobu; najpoznatiji primjer je staklena piramida kroz koju se ulazi u pariški muzej Louvre.
Grčki matematičari su dolazili u Egipat usvojiti nova znanja, među njima se ističu Pitagora i Tales. Teško je zaključiti što i koliko su učili jedni od drugih, ali s obzirom da je geometrija imala široku primjenu u starom Egiptu i procvjetala u antičkoj Grčkoj, kombinacija njihovih postignuća se sigurno očituje u nasljeđu koje su ostavili za sobom.

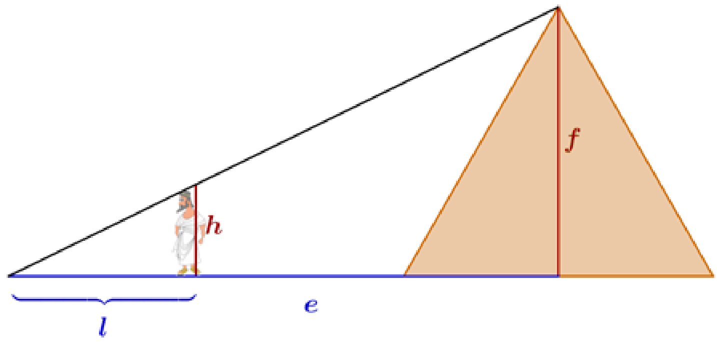
Piramide u nastavi matematike

Piramide se u nastavi matematike obrađuju kao nastavne jedinice u cjelini *Geometrijska tijela* u osmom razredu osnovne škole te *Poliedri i rotacijska tijela* u drugom razredu srednje škole (gimnazije ili tehničke škole). U sedmom razredu osnovne škole se spominje Velika piramida čiju je visinu Tales računao pomoću proporcionalnosti. Staroegipatske piramide mogu poslužiti kao izvrstan primjer korelacije povijesti i matematike, što se vidi u sljedećim primjerima.

Tales je jedan od svojih posjeta Egiptu iskoristio da izračuna visinu Velike piramide pomoću sjene. Postoje dvije verzije te priče. Prema prvoj Tales je mjerenje proveo u doba dana kad je čovjekova sjena jednake duljine kao njegova visina, a sjena paralelna s bridom baze. Tada je visina piramide jednaka udaljenosti vrha sjene od središta piramide. Druga verzija se zasniva na istom principu, samo što se umjesto čovjeka koristi štap poznate duljine zaboden okomito u tlo. Visina čovjeka (štap) je poznate duljine, njegova se sjena može lako izmjeriti, a udaljenost vrha sjene piramide od njenog središta se dobije zbrajanjem duljine sjene i polovice duljine baze. Iz sličnosti dvaju pravokutnih trokuta slijedi jednakost omjera u kojem se nalaze odgovarajuće stranice. Uz oznake kao na slici 4.5 vrijede omjeri $h : f = l : (l + e)$ i $h : l = f : (l + e)$.

U udžbeniku za osmi razred osnovne škole posebno su označeni dijelovi gradiva koji nisu u obaveznom programu. Jedan kutak za radoznale nalazi se u sklopu nastavne jedinice *Četverostrana piramida* ([8], str. 172) i sadrži zadatak 1.

Zadatak 1. *Iz ovog teksta o piramidama sastavi matematička pitanja.*
Keopsova piramida je najveća od tri velike egipatske piramide (Keopsova, Kefrenova i Mikerinova piramida). Ona je grobnica faraona Keopsa u Gizi, izgrađena oko 2560. p.K.



Slika 4.5: Talesovo mjerenje visine Velike piramide (izvor: `https://eucbeniki.sio.si/mat9/906/index6.html`)

Smatra se da je oko 100 000 ljudi gradilo Keopsovu piramidu punih 20 godina. Sastoji se od oko 2300000 kamenih blokova. Svaki je kamen težak oko 2 t i visok 2 m, a neki su dugi i po 5 m i dopremljeni su čamcima niz rijeku Nil. To se moglo raditi jedino u proljeće, kada se Nil izlijevao, pa je zato trebalo 20 godina i oko 500 000 plovidaba da se donese potrebna količina kamena. Zatim su ove blokove uredno redali, a druga grupa ljudi ih je izvlačila do mjesta gdje se gradila piramida. Kada je sagrađena, piramida je bila visoka 145.75 m, ali se tokom godina smanjila za 10 m. Radi se o pravilnoj četverostranoj piramidi s osnovnim bridom duljine 229 metara. Svaka je stranica pažljivo orijentirana prema jednoj od četiriju strana svijeta. Na sjevernoj je strani ulaz. Unutrašnjost piramide čine tri prostorije povezane mnogobrojnim hodnicima. U srcu piramide je kraljeva odaja gdje je smješten Keopsov sarkofag.

Marta Topić u svom članku *Stari Egipat*([16]) osim kratkog povijesnog pregleda donosi i sedam raznovrsnih zadataka. Uspjela je spojiti postotke, proporcionalnost, kombinatoriku i stereometriju sa staroegipatskim motivima. Zadatak 2 povezuje proporcionalnost i piramide.

Zadatak 2. Arheolozi su u jednoj od piramida pronašli veliku prostoriju zatrpanu pijeskom. Budući da su sumnjali da bi upravo u toj prostoriji mogli pronaći veliko blago, prionuli su na posao te su procijenili da će 10 arheologa taj posao obavljati 15 dana. Nakon 3 dana odlučili su ubrzati kako bi prostoriju očistili za ukupno 11 dana. Koliko im se još arheologa treba priključiti?

Zaključak

Staroegipatska civilizacija je za sobom ostavila brojna arhitektonska postignuća, od kojih su neka sačuvana u gotovo savršenom stanju, neka oštećena, a neka su, nažalost, uništena. Njihovo je stvaranje podrazumijevalo određeno matematičko znanje i primjenu istog. Među malobrojnim matematičkim zapisima ističu se Rhindov i Moskovski papirus pomoću kojih je otkriven dio principa koje su koristili stari Egipćani. Ostatak je prepušten nagađanjima među kojima prevladava poznavanje omjera zlatnog reza i njegova primjena u umjetnosti. Time bi se staroegipatska matematika podigla na višu razinu od praktične, gotovo primitivne, kojoj svjedoče pronađeni zapisi. U prilog tom nagađanju ne idu ni mjerenja koja je ili nemoguće izvršiti ili treba uzeti u obzir odstupanja koja znatno mijenjaju rezultate. Proučavanjem nasljeđa Starog Egipta otkriven je dio njegove povijesti, a ostatak je zagonetka koju tek treba riješiti.

Bibliografija

[1] L. Beeckmans, *The Splitting Algorithm for Egyptian Fractions*, Journal of Number Theory **43** (1993), 173–185.

[2] A. Ben-Menahem, *Historical Encyclopedia of Natural and Mathematical Sciences*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2009.

[3] D. M. Burton, *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill, New York, 2011.

[4] M. Clagett, *Ancient Egyptian Science: A Source Book*, sv. Volume Three: Ancient Egyptian Mathematics, American Philosophical Society, Philadelphia, 1999.

[5] A. Deranja, *Horusovo oko*, Nova akropola (2009), br. 60, 27–29.

[6] V. Devidé, *Matematika kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[7] R. J. Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[8] D. Glasnović Gracin, L. Kralj, S. Banić, Z. Ćurković i M. Stepić, *Petica+ 8*, sv. drugi, SysPrint, Zagreb, 2010.

[9] N. Jovanović, *Prijenosna antika*, Zarez (2013), br. 369.

[10] P. Lončar, *Egipatski razlomci*, Matematičko-fizički list **65** (2014/15), br. 1, 8–16.

[11] M. R. Luberto, *Piramide: neriješena zagonetka*, EPH Media, Zagreb, 2013.

[12] G. Markowsky, *Misconceptions about the Golden Ratio*, The College Mathematics Journal **23** (1992), br. 1, 2–19.

[13] Elizabeth Nix, *What is the Rosetta Stone?*, `http://www.history.com/news/ask-history/what-is-the-rosetta-stone`, posjećena rujan 2016.

[14] C. Rossi, *Architecture and Mathematics in Ancient Egypt*, Cambridge University Press, New York, 2003.

[15] Z. Šikić, *Istine i laži o zlatnom rezu*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike **4** (2003), br. 15, 50–69.

[16] M. Topić, *Stari Egipat*, Matka: časopis za mlade matematičare **22** (2014), br. 87, 184–188.

[17] *Geography*, `http://www.ancientegypt.co.uk/geography/home.html`, posjećena lipanj 2016.

[18] `http://www.ancientegypt.co.uk/staff/resources/discussions/d02/home.html`, posjećena lipanj 2016.

[19] *Pyramids of Giza*, `https://www.britannica.com/topic/Pyramids-of-Giza`, posjećena kolovoz 2016.

[20] `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html`, posjećena srpanj 2016.

Sažetak

U ovom diplomskom radu ukratko su iznesena matematička znanja starih Egipćana i njihova povezanost s arhitekturom tog doba.
Staroegipatska civilizacija ostavila je za sobom bogato nasljeđe, posebice u umjetnosti i arhitekturi. Simetričnost i proporcionalnost sugeriraju korištenje matematike pri planiranju i izgradnji. Papirusi matematičkog sadržaja su očuvani u malom broju i nije jasno vidljiva veza s arhitekturom, što rezultira velikim brojem teorija o nastanku piramida i ostalih spomenika. Pritom je važno uzeti u obzir praktičnu primjenu staroegipatske matematike i bazirati se na činjenicama koje su tada bile poznate, a ne na onima koje danas znamo.

Summary

This thesis briefly summarizes the ancient Egyptians' mathematical knowledge and its connection with the architecture of that era.
The ancient Egyptian civilization has left behind a rich legacy, especially in art and architecture. Symmetry and proportionality suggest the use of mathematics in planning and construction. Mathematical papyri are preserved in a small number and the connection with architecture is not clearly visible, which results in a large number of theories about the origin of the pyramids and other monuments. It is important to consider the practical purpose of ancient Egyptian mathematics and focus on the facts that were known during that period instead of those that we are familiar with today.

Životopis

Matea Baraba rođena je 24. rujna 1990. u Zadru, gdje upisuje Osnovnu školu Stanovi 1997. godine. Zbog selidbe školovanje nastavlja u Osnovnoj školi Bartula Kašića te 2001. upisuje Glazbenu školu Blagoje Bersa. Obje osnovne škole završava 2005. godine, kada upisuje opći smjer Gimnazije Jurja Barakovića. Maturirala je 2009. godine, nakon čega upisuje preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Zvanje prvostupnice edukacije matematike stekla je 2013. godine kada nastavlja školovanje na nastavničkom smjeru diplomskog studija matematike.